نعرف الشبكة العليا الجزئية

لتكن $(E, \leq)$ نصف شبكة عليا بالتالي كل مجموعة جزئية مؤلفة من عنصرين $\{x,y\}$ لها حد أعلى أصغري في E هو $x \vee y$

لتكن A مجموعة جزئية من E تأخذ علاقة الترتيب المعرف في E ولتكن $\{x,y\} \subseteq A$ فيكون لدينا ثلاث احتمالات :

1) $\sup_A \{x,y\}$ موجود ويساوي $x \vee y$

2) $\sup_A \{x,y\}$ موجود ومختلف عن $x \vee y$ ويكون في هذه الحالة $x \vee y \leq \sup_A \{x,y\}$

3) $\sup_A \{x,y\}$ غير موجود.

مثال

لتكن نصف الشبكة العليا $(N^*, |)$ والمجموعة A معطاة بالشكل

$A = \{2, 3, 6, 7, 9, 42\}$

1) $\sup_A \{2,3\} = lcm(2,3) = 6$

2) $\sup_A \{3,7\} = 42 \neq lcm\{3,7\} = 21$

3) $\{7,9\}$ المجموعة ليس لها حد أعلى أصغري في A

ملاحظة

يوجد تكافؤ بين الحالتين التاليتين

1) $\sup_A \{x,y\}$ موجود ويساوي $x \vee y$

2) $x \vee y \in A$

البرهان

$1 \Rightarrow 2$: واضح

$2 \Rightarrow 1$: إذا كانت $x \vee y \in A$ فإن $x \vee y$ هو حد أعلى للمجموعة $\{x,y\}$ في A وهو أصغري

تعريف:
نسمي المجموعة الجزئية الغير خالية A من نصف الشبكة العليا E "نصف شبكة عليا جزئية" إذا تحقق الشرطين التاليين المتكافئين:

1) العنصر $\sup_A\{x,y\}$ موجود ويساوي $x\vee y$ من أجل أي عنصرين x,y من A
2) $x\vee y\in A$ من أجل أي عنصرين x,y من A

ملاحظات:
1) في كلا الشرطين يجب الانتباه إلى أنه مهما يكن العنصران x,y من A ففي المثال السابق نلاحظ أن A ليست نصف شبكة عليا جزئية بالرغم من أن $2\vee 3\in A$
2) من الممكن أن لا تكون A نصف شبكة عليا جزئية ولكنها نصف شبكة عليا من أجل الترتيب المحرّض

مثال:
في نصف الشبكة العليا $(\mathbb{N}^*, |)$ المجموعة $A=\{1,2,3,4,24\}$ ليست نصف شبكة عليا جزئية ولكنها نصف شبكة عليا من أجل الترتيب المحرّض.
وذلك لأن كل عنصرين من عناصرها يملكان حداً أعلى أصغرياً في A ولكنها ليست نصف شبكة عليا جزئية بالسبب الموضح

نصف الشبكة الدنيا الجزئية «تعريف»
من أجل نصف الشبكة الدنيا $(E,\leq)$ نشكل بالمقابلة ما يسمى: إذا كانت $A\subseteq E$ مزودة بعلاقة الترتيب المحرّضة من E، فإذا كانت $A\subseteq E$ لدينا ثلاث احتمالات ممكنة

1) $\inf_A\{x,y\}$ موجود ويساوي $x\wedge y$
2) $\inf_A\{x,y\}$ موجود ومختلف عن $x\wedge y$ ويكون في هذه الحالة $x\wedge y\neq\inf_A\{x,y\}$
3) $\inf_A\{x,y\}$ غير موجود

تعريف

نسمي الجزء الغير خالية A من نصف الشبكة المبنية " نصف شبكة دنيا جزئية "
إذا حققت الشرطين التاليين المتكافئين :

1) $\{x,y\}$ يوجد $\inf_A$ يساوي $x \wedge y$ من أجل أي عنصرين $x, y \in A$
2) $\inf_A \{x,y\} \in A$ من أجل أي عنصرين $x, y \in A$

الشبكات الجزئية :

نتحدث عن الجزء الجزئية الغير خالية A من الشبكة $(E, \leq)$ بأنه شبكة جزئية إذا كانت بنفس الوقت نصف شبكة عليا جزئية و نصف شبكة دنيا جزئية وهذا يعني أنه من أجل أي عنصرين $x, y \in A$ فإن

$$x \wedge y \in A \quad \& \quad x \vee y \in A$$

في هذه الحالة تكون A شبكة

$$\sup_A \{x,y\} = x \vee y \qquad \inf_A \{x,y\} = x \wedge y$$

أمثلة

[1] قواسم عدد : إذا أخذنا الشبكة $(N^*, 1)$ وليكن n عدد صحيح موجب مختلف عن الصفر ولنرمز بـ $D(n)$ لمجموعة قواسم العدد n فإن $D(n)$ تكون شبكة جزئية من N^*

مثلاً $D(2) = \{1, 2\}$

$D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$

$D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

إذا $x | n$ & $y | n$ فإن

n تقسم $\gcd(x,y) | n$

$\text{lcm}(x,y) | n$

المجموعات المفتوحة والمغلقة في فضاء تبولوجي

ليكن E فضاء تبولوجيا (E, τ). $P(E)$ تشكل شبكة مثلا أسرة المجموعات المفتوحة في E تكون شبكة جزئية من $P(E)$

وأسرة المجموعات المغلقة في E تكون شبكة جزئية من $P(E)$

المجموعات المنتهية أو المنتهية التمام

لتكن E مجموعة ما ولتكن الشبكة $(P(E), \subseteq)$ نقول عن المجموعة الجزئية A من E بأنها منتهية التمام إذا كانت متممتها منتهية (C_A)

إن أسرة المجموعات المنتهية أو المنتهية التمام تكون شبكة جزئية من $P(E)$

لنناقش الاحتمالات الممكنة

* إذا كانت A, B مجموعتين جزئيتين من E منتهيتين فإن كل من $A \cup B$ و $A \cap B$ منتهية

* إذا كانت A, B مجموعتان جزئيتان من E منتهيتي التمام أي كل من C_A و C_B منتهية (حسب التعريف)

حسب قانون ديمورغان فإن

$C_A \cap C_B = C_{A \cup B}$ منتهية

$\Rightarrow A \cup B$ منتهية التمام

كذلك:

$C_{A \cap B} = C_A \cup C_B$ منتهية $\Rightarrow A \cap B$ منتهية التمام

إذا كانت A منتهية و B منتهية التمام فإن

$A \cap B$ منتهية لأن C_B منتهية وبالتالي

$C_{A \cup B} = C_A \cap C_B \Rightarrow A \cup B$ منتهية التمام

وبالتالي أسرة المجموعات المنتهية أو المنتهية التمام من E تكون شبكة جزئية من $P(E)$

مبرهنة: بعض خواص الشبكات الجزئية

نفرض أن كلا من E و E' تعين شبكة أعلى فإن كل منهما تكون مجموعة مرتبة

ويمكن أن نعرف بنفسها سومورفيزم الترتيب f (أو التطبيق المتزايد) ولكن في الحالة العامة f لا يحافظ على الحد الأعلى الأصغري

مثال:

نفرض أن $E=(\mathbb{N}^*,|)$ ، $F=(\mathbb{N}^*,\leq)$ فإذا أخذنا f التطبيق المطابق من $\mathbb{N}^*$ يكون عندئذ متزايد لأنه:

إذا كان $x|y$ فإن $f(x)=x\leq f(y)=y$

التطبيق العكسي غير متزايد بالتالي فهو ليس إيزومورفيزم ترتيب مثال من ذلك 2,3

ولكن f لا يحافظ على الحد الأعلى الأصغري مثلاً

$$f(4\vee 6)=f(12)=12 \rightarrow \text{لأنه مطابق}$$
$$f(4)\vee f(6)=4\vee 6=6$$

تعريف:

نقول عن التطبيق f من نصف الشبكة العليا E في نصف الشبكة العليا F أنه مورفيزم نصف الشبكة العليا (أو ∨-مورفيزم) إذا تحقق من أجل أي عنصرين $x,y\in E$ العلاقة

$$f(x\vee y)=f(x)\vee f(y)$$

ملاحظة

إن أي ∨-مورفيزم (أو ∧-مورفيزم) يكون تطبيقاً متزايداً

البرهان.

من أجل ∨-مورفيزم إذا كان $x\leq y \Leftrightarrow x\vee y=y \Rightarrow$ (لأن f هو ∨-مورفيزم)

$$f(x\vee y)=f(y) \Rightarrow f(y)=f(x)\vee f(y)$$
$$\Rightarrow f(x)\leq f(y)$$

أي أن f متزايد

من أجل ∧-مورفيزم إذا كان $x\leq y \Leftrightarrow x\wedge y=x \Rightarrow$

$$f(x\wedge y)=f(x) \Rightarrow f(x)\wedge f(y)=f(x)$$

$\Leftarrow$ $f(x) \le f(y)$ أي أن f متزايد

تعريف:

نعرف $\vee$- ايزومورفيزم بأنه $\vee$- مورفيزم بالإضافة إلى أنه تقابل

ملاحظة:

يوجد تكافؤ بين التعريفين التاليين

(1) f $\vee$- ايزومورفيزم

(2) f ايزومورفيزم ترتيب

البرهان:

$2 \Leftarrow 1$ لتكن f $\vee$- ايزومورفيزم من E على F مجموعتين مرتبتين. إذن f تقابل ومتزايد (لأنه $\vee$- مورفيزم) ثم أن f^{-1} متزايد وذلك لأن:

نفرض:

$$f(x) \le f(y) \Rightarrow f(x) \vee f(y) = f(y)$$

$$\Rightarrow f(x \vee y) = f(y)$$

وبما أن f متباين كونه تقابل فإنه

$$x \vee y = y \Rightarrow x \le y \Rightarrow f^{-1}$$ متزايد

وبالتالي فإن f ايزومورفيزم ترتيب

$1 \Leftarrow 2$

لنفرض أن f ايزومورفيزم ترتيب $\Leftarrow$ (حسب ملاحظة سابقة) f يحفظ الحدود العليا الأصغرية

(الملاحظة $f: E \to F$ ايزومورفيزم ترتيب و $A \subseteq E$ و $\exists$ الحد الأعلى الأصغري للمجموعة A في E فإن $f(\sup_E A) = \sup_F f(A)$) وبالتالي فإن

$$f(\sup_E \{x, y\}) = \sup_F f(\{x, y\})$$

$$f(x \vee y) = \sup_F (f(x), f(y)) = f(x) \vee f(y)$$

مبدأ التقابل ⇐ f ∨ - إيزومورفيزم

ملاحظة:

لدينا نتيجة مماثلة من أجل ∧ - إيزومورفيزم (التكافؤ)

مورفيزمات الشبكات

نفرض أن كل من E و E' شبكة عندئذ يكون التطبيق $f: E \to E'$ ∨ - مورفيزم

إذا كان من أجل أي عنصرين x, y من E فإن

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

و ∧ - مورفيزم إذا كان من أجل $x, y \in E$ فإن

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

لكن هذين المفهومين غير متكافئين في الحالة العامة.

مثال:

ليكن E مجموعة ولتكن F أسرة الأجزاء المغلقة في E لنعرف التطبيق

$f: P(E) \to F$ بالشكل التالي

$f(x) = \bar{x}$ (لصاقة)

من أجل أي x من $P(E)$ فيكون

$$\forall x, y \in P(E) : f(x \cup y) = \overline{x \cup y} = \bar{x} \cup \bar{y} = f(x) \cup f(y)$$

أي أن التطبيق f هو ∨ - مورفيزم بينما

$$f(x \cap y) = \overline{x \cap y} \neq \bar{x} \cap \bar{y} = f(x) \cap f(y)$$

نلاحظ أن f ليس ∧ - مورفيزم

تعريف:

نسمي التطبيق $f: E \to E'$ من الشبكة E بأنه مورفيزم شبكة إذا كان

∨ - مورفيزم و ∧ - مورفيزم بنفس الوقت

ملاحظة:

حسب ما رأيناه سابقاً نستنتج أن كل مورفيزم شبكة يكون متزايد

وكذلك نعرف ايزومورفيزم الشبكة بأنه مورفيزم شبكة بالإضافة إلى أنه تقابل

مبرهنة:
إذا كانت L' ، L و $f: L \to L'$ تطبيق من الشبكة L إلى الشبكة L' فإن المبرهنات التالية متكافئة:

1) f ايزومورفيزم شبكة
2) f ايزومورفيزم ترتيب
3) f $\vee$ - ايزومورفيزم
4) f $\wedge$ - ايزومورفيزم

البرهان:
لتبرهن سابقة أنه يوجد تكافؤ بين 2) f 3) f 4) لذلك يكفي أن نبرهن من تكافؤ
1) $\Leftrightarrow$ 4)
$1 \Rightarrow 4$ واضح
$4 \Rightarrow 1$: نفرض أن f $\wedge$ - ايزومورفيزم $\Leftarrow$ f ايزومورفيزم ترتيب ومنه يحافظ على الحدود العليا الصغرى أي أنه $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ وبما أن f تقابل
و $\wedge$ - مورفيزم $\Leftarrow$ f هو ايزومورفيزم شبكة

المرشحات والمثاليات:
في هذه الفقرة سوف نفرض من أجل التبسيط أن [illegible] من أجل التعريف) بأنه كل نصف شبكة أو شبكة تملك عنصر أصغر نرمز له بـ 0 وعنصر أكبر نرمز له بـ 1

المرشحة في نصف الشبكة الدنيا:
لتكن أ نصف شبكة دنيا تعريف: نسمي المجموعة الجزئية غير الخالية f من أ مرشحة من أ إذا حققت ما يلي:
1) إذا كانت $x \in f$ و $x \leq y$ فإن $y \in f$
2) إذا كانت $x, y \in f$ فإن $x \wedge y \in f$

ملاحظة:
الشرط (a)b(2) يبين أن كل مرشحة تكون نصف شبكة دنيا جزئية لكن العكس غير صحيح

• إن E مرشحة من E تسمى بالمرشحة الغير فعلية impropre، وكل مرشحة F مختلفة عن E تسمى مرشحة فعلية propre

إذا كانت card E ≥ 2 (تشكل) عندئذٍ يوجد في الأقل مرشحة فعلية على سبيل المثال {1}
من الشرط (1) ينتج أن العنصر 1 ينتمي لجميع المرشحات ومن الشرط (2) ينتج أن المرشحة F تكون فعلية ⟺ كان الصفر $0 \notin F$ وإذا انتمى تكون غير فعلية

المرشحات المولدة:

(1) ليكن a عنصراً في الشبكة E (E تمثل شبكة دنيا) لنعرف المجموعة f_a بالشكل التالي

$$f_a = \{x \in E \; ; \; x \geq a\}$$

عندئذٍ فإن f_a تكون مرشحة في E (لنبرهن ذلك)

ليكن $x \in E$ حيث $x \leq y$ و $x \in f_a$ فإن

$$x \geq a \;\text{و}\; x \leq y \Rightarrow y \geq a \Rightarrow y \in f_a$$

ليكن $x, y \in f_a \Rightarrow x \geq a$ و $y \geq a \Rightarrow x \wedge y \geq a \Rightarrow x \wedge y \in f_a$

$\Rightarrow f_a$ مرشحة.

نسمي مثل هذه المرشحة f_a بالمرشحة الأساسية المولدة بـ a ويكون a هو العنصر الأصغر من f_a وبالعكس
إذا كانت F مرشحة تملك عنصراً أصغر مثل a فإن $F = f_a$ أي المرشحة تكون مولدة بـ a

(2) إذا كانت مجموعة غير خالية من المرشحات $(f_i)_{i \in I}$ تكون تقاطعها مرشحة (لنثبت ذلك)

لتكن $F = \bigcap_{i \in I} f_i$ بسهولة يمكن التحقق من أن (1) و (2) للمرشحة محققين كما أن

$F \neq \emptyset$ وذلك لأنه $\forall i \in I$ فإن $1 \in f_i$ وبالتالي فإن F تحوي على الأقل العنصر المذكور 1.

(3) لتكن G مجموعة جزئية من E بالاعتماد على ما سبق يمكن أن نعرف المرشحة المولدة بـ G

وهي عبارة عن تقاطع جميع المرشحات المارية لـ G أي أنه أصغر مرشحة تحوي G

ويرمز له بـ f_G ونسمي G مولد لـ f_G مثلاً لو حسبنا أي مرشحة f تحتوي G

لا تقل عن ... f ويكون

$$f = f_f$$

انتهت المحاضرة